**תכנון אלגוריתמים תרגיל 1 – דף תשובות**

הגישו חלק זה בלבד. אין לחרוג מהמקום המוקצה לתשובה!

|  |
| --- |
| שאלה 1 – תיאור הרדוקציה (עד 9 שורות) |
| ממיר קלט- נוסיף קודקוד חדש s ונחבר לכל קודקוד ששיך לs1........sk קשת (s,si) |
| סה"כ K קשתות ו קודקוד אחד. |
| ממיר פלט- נעבור על הפלט ונחפש את המסלול שמסתיים בt אם שונה מאינסוף נחזיר |
| את המחרחק פחות אחד אם שווה לאינסוף נחזיר אינסוף |
|  |
| נפעיל את ממיר הקלט , נריץ את אלגוריתם ב' על קודקוד s החדש שהוספנו |
| נפעיל את ממיר הפלט וסיימנו. |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 1 – הוכחת נכונות (עד 25 שורות) |
| משפט: האלגוריתם מחזיר את המסלול הקצר ביותר המתחיל באחד מן הקודקודים s1....sk |
| ומסתיים בt |
| טענת עזר: קיים ב-G מסלול המתחיל באחד מ הקודקדים s1..sk ומסתיים בt באורך d אם"ם |
| קיים מסלול באורך d+1 ב'G המתחיל בs ומסתיים בt |
| הוכחת נכונות האלגוריתם המבוסס על הרדוקציה על סמך טענת העזר: |
| נניח בה'כ שהמסלול הקצר ביותר מs1....sk לt מתחיל בs1 . |
| אזי יהי d+1 אורך המסלול המינמאלי ב'G בין s ל t על פי טענת העזר קיים מסלול בG |
| באורך d ביןs1 לt . נניח בשלילה כי קיים מסלול קצר יותר בין s1 ל t |
| נסמן את אורכו בm כאשר m<d מטענת העזר ינבע כי קיים מסלול ב'G באורך m+1 |
| בסתירה לכך שאורך המסלול הקצר ביותר ב'G הוא d+1. |
| הוכחת טענת העזר: |
| (–->) קיים בG מסלול בין s1 לt בה"כ יהי u = (s1,v1,v2...,t) המסלול בין s1 ל t באורך d |
| לפי בניית 'G קיימת צלע (s,s1) נרחיב את המסלול u ל'u כך 'u=(s,s1,v1...t) |
| הוספנו בדיוק קודקוד אחד s ולכן אורך המסלול ב'G הוא d+1. |
| (<–--) קיים ב'G מסלול בין s ל t באורך d+1 , יהי 'u=(s,s1,v1,v2....t) |
| לפי בניית 'G הקודקודים והקשתות בG זהות ל'G למעט הקודקוד s והקשתות היוצאות |
| ממנו ולכן קיים מ G המסלול 'u=(s1,v1,v2...t) הורדנו בדיוק קודקוד אחד ולכן אורך |
| המסלול הוא בדיוק d. |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 1– מימוש ניתוח זמן ריצה (עד 5 שורות) |
| ממיר קלט – הוספת צלעות בין s ל כל אחד מבין s1.....sk קודקודים O(k)<=O(|V|)  K קטן מV |
| אלגוריתם ב' O(|V|+|E|) |
| ממיר פלט – מעבר על כל המרחקים של כל הקודקדים O(|V|) |
| סה"כ O(k)+O(|V|+|E|)+O(|V|)=O(|V|+|E|) |

|  |
| --- |
| שאלה 2 סעיף א'– תיאור הרדוקציה (עד 9 שורות) |
| ממיר קלט: נעבור על כל איברי המטריצה אם האיבר שווה או גדול מp0 נחליף ב1 |
| אחרת נרשום 0. |
| ממיר פלט: לא עושה כלום(עונים כמו אלגוריתם B) |
|  |
| נפעיל את אלגוריתם B על הקלט החדש |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 2 סעיף א'– מימוש וניתוח זמן ריצה (עד 5 שורות) |
| ממיר קלט – מעבר על כל האיברים זה O(n^2) |
| ממיפר פלט – לא עולה בזמן ריצה. |
| לכן נקבל סה"כ O(n^2)+O(n^2.5)=O(n^2.5) |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 2 סעיף ב'– תיאור האלגוריתם (עד 20 שורות) |
| בקצרה: נמיין את ערכי המטריצה ונבצע חיפוש בינארי ע"י שימוש באלגוריתם של סעיף א כל פעם נבחר את הערך הנוכחי להיות P0 עד שנמצא את הP0 המקסימלי |
|  |
|  |
| אתחול : נסדר את כל ערכי המטריצה במערך (גודל המערך הוא n^2 ) נסמן parray |
| 1. sort parray |
| 2. הגדר a = 0 , c =n^2-1 ,ans =null |
|  |
| 3. (while(a<c |
| 3.1 middle=(c-a)\2 |
| 3.2 נפעיל את אלגוריתם A1 על parray[middle] ועל P |
| 3.3 אם נמצא שידוך : |
| 3.3.1 ans – השידוך שחזר |
| 3.3.2 low<-middle |
| 3.4 אם לא נמצא שידוך: |
| 3.4.1 c<-middle |
| 4 החזר ans |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 2 סעיף ב' – הסבר נכונות (עד 20 שורות) |
| האלגוריתם עוצר : |
| בכל איטרציה מקטנים את c או מגדלים את a ולכן לאחר O(log(n)) איטרציות a יהיה גדול |
| מc |
| נכונות: |
| אנחנו מתחילם לחפש P0 מקסימלי שקיים לו שידוך , אנחנו מבצעים חיפוש בינארי |
| על איבירי המטריצה עד שמוצאים P0 מקסימלי , נשים לב שהאלגוריתם תמיד יחזיר |
| תשובה מכיוון שאלגוריתם A1 נכון. |
| עצם פעולת החיפוש הבינארי מבטיחה לנו שנחזיר את P0 המקסמילי , אנחנו ממשיכים |
| להפעיל את האלגוריתם עד שאנחנו מגעים לשני איברים סמוכים שלאחד יש שידוך ולאחד |
| אין. |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 2 סעיף ב' – מימוש וניתוח זמן ריצה (עד 12 שורות) |
| אתחול + מיון O(n^2log(n^2))=O(n^2log(n)) |
|  |
| צעד: בכל צעד a ו c מתקרבים בחצי מהמרחק בינהם , נבצע בדיוק log(n^2) איטרציות |
| כלומר O(log(n)) (לפי חוקי לוג) בכל איטרציה מפעילם את אלגוריתם A1 |
| O(n^2.5) |
| סהכ נקבל: |
| O(n^2log(n))+O(n^2.5) \*O(log(n))=O(n^2.5log(n)) |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 3 סעיף א' – הוכחת נכונות (עד 20 שורות)  משפט : האלגוריתם מחזיר שידוך בעל ערך מקסימלי |
| טענת עזר: ב P קיים שידוך מקסימלי X בגודל k אמ"מ ב +P קיים אותו שידוך מקסימלי X בגודל c+k. |
| הוכחת המשפט: |
| נניח בשלילה כי קיים שידוך גדול יותר X ' ב+P מ X . ידוע כי קיים ב P שידוך מקסימלי X בגודל k . |
| מהנחת השלילה קיימת ב +P שידוך גדול > k ,אבל לפי הטענת העזר קיים אותו שידוך מקסימלי X בגדול c+k . בסתירה לכך שיש שידוך גדול יותר X.' |
|  |
| הוכחת טענת העזר: נניח P מטריצה |
| כיוון ראשון =>: |
| נתון כי ב P קיים שידוך מקסימלי Xבגדול k .לפי הקופסה השחורה לכל (i,j) במטריצה P נבנה מטריצה +P , |
| כך שכל איבר במטריצה החדשה יהיה (I,j)+|c| . יהי (in,jn) … (i1,j1) איברי המטריצה p . |
| נבנה את ערכי איברי המטריצה +p כך (in,jn)+|c|.... ו (i1,j1)+|c| איברי השידוך המקסימלי |
| ב p. |
| מכיוון שכל הערכים ב+P גדלים בערך מוחלט קבוע c , אז בהכרח לכל0>(i,j)>(k,1) ב P |
| יהיה ב+p . לכן גם השידוך הקמסימלי בP יהיה אותו שידוך מקסימלי ב+P וגודולו יהיה |
| K+C |
| כיוון שני <=: |
| נתון כי ב+P קיים שידוך מקסימלי X בגדול c+k .יהי 'X שידוך ב P בגודל k .ידוע כי כל איבר |
| ב X' קטן ב|C| . כמו כן,כל האיברים ה+P חיוביים. כלומר לכל (k,1)>(i,j) ב +P בהכרח יהיה |
| קטן באותה מידה ב+P לכן i,j) – (k,l) = (i+,j+) – (k+,l+)) כך ש |
| i,j) + |c| = (i+,j+)) לכן X'=X וערך השידוך הוא K+C |

|  |
| --- |
| שאלה 3 סעיף ב' – דוגמה נגדית |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 3 סעיף ב' – הסבר לדוגמה (עד 5 שורות) |
| מסלול מ C-B : באלגוריתם הראשון המסלול יתחיל בC יעבור ל A |
| ואז B (אורך מינוס 2) לאחר המרת הפלט נריץ את אלגוריתם השני הוא |
| יחזיר לנו את המסלול C ואז B (אורך 100) וזאת סתירה למסלול הקצר |
| ביותר שהוא עובר גם בA |

|  |
| --- |
| שאלה 4 – ניסוח הטענה הראשית (עד 3 שורות) |
| בהינתן נפח W0 וקבוצת עוגיות S={1...n} האלגוריתם מחזיר קבוצת עוגיות בעל נפח של |
| לפחות W0 בעל ערך קלורי מינמאלי. |

טענת עזר: לאחר איטרציות, קיים פתרון אופטימלי כך ש .

הוכחה לטענה הראשית על סמך טענת העזר:

|  |
| --- |
| האלגוריתם עוצר (עד 3 שורות) |
| אנחנו מוציאים מ קבוצת כל העוגיות בכל איטרציה עוגיה, או שנגיע לנפח המתאים |
| או שיגמרו העוגיות ( ידוע שכל העוגיות לפחות W0 ) |

|  |
| --- |
| האלגוריתם מחזיר פתרון חוקי (עד 6 שורות) |
| ידוע שנפח כלל העוגיות הוא לפחות W0 , אנחנו מוצאים בכל איטרציה עוגיה |
| מS ומוספים את נפחה לT ואת העוגיה לG מכיוון שהלולאה עוצרת רק כאשר T>W0 |
| הרי ש בG יהיו לפחות עוגיות בנפח W0 ולכן הפתרון הוא חוקי. |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| האלגוריתם מחזיר פתרון אופטימלי (עד 12 שורות) |
| על פי טענת העזר לאחר r איטרציות קיים פתרון אופטימלי Or כך |
| נראה שבסיום האלגוריתם נקבל G=O. נניח בשלילה ש O לא מוכל בG , לכן קיים |
| איבר ששיך לG ולא שייך לO ידוע ששני הפתרונות הם חוקיים(האלגוריתם מחזיר פתרון |
| חוקי) ונקבל ש | G| גדול ממש מ|O| בסתירה למינמאליות של O. |
| לכן ניתן להסיק ש G=O. |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

הוכחה לטענת העזר באינדוקציה על .

|  |
| --- |
| בסיס - (עד 2 שורות)  r=0 , ולכן G הוא קבוצה הריקה , והקבוצה הריקה מוכלת פתרון |
| אופטמלי כלשהו. |

|  |
| --- |
| צעד – מקרה א': . (עד 4 שורות)  , נבחר את בגלל ש נקבל |
|  |
|  |
|  |
| צעד – מקרה ב': . (עד 10 שורות)  נשים לב ש |Oi-1|>|Gi| אם היו שווים Gi היה פתרון אופטימלי והיינו עוצרים. |
| תהי iהעוגיה בעלת הנפח הגדול ביותר ב Oi-1/Gi כעט נגדיר את |
| נראה ש Oi פתרון חוקי |
| נשים לב שגם j וגם I אינם שייכים לGi-1 והאלגרויתם "העדיף" את j על פניi זאת אומרת |
| שj טוב לפחות כמו I . ולפי הנחת האינדוקציה Oi-1 פתרון חוקי זאת אומרת שהנפח שלו |
| גדול או שווה לW0 הנפח של J גדול או שווה לi ולכן נקבל |
|  |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
| שאלה 4 – מימוש וניתוח זמן ריצה (עד 8 שורות) |
| 1 אתחול O(1) |
| 2 נמיין אתהעוגיות לפי הנפחד בסדר יורד O(nlogn) |
| 3. הוצאת מקסימילי והוספה O(1) ,לכל היותר n פעמים סהכ O(n) |
| סהכ נקבל O(nlogn) |
|  |
|  |
|  |